填空题：

1、设A={2,4,6}，A上的二元运算\*定义为：a\*b=max{a,b}，则在独异点<A,\*>中，单位元是( )，零元是( )。

答：2，6

2、设A={3,6,9}，A上的二元运算\*定义为：a\*b=min{a,b}，则在独异点<A,\*>中，单位元是( )，零元是( )；

答：9，3

3、设a是12阶群的生成元， 则a2是( )阶元素，a3是( )阶元素。

答： 6,4

4、群<G,\*>的幂等元是(　　)，有(　　　)个。

答：单位元，1

5、设a是10阶群的生成元， 则a4是( )阶元素，a3是( )阶元素。

答：5，10

6、素数阶群一定是( )群, 它的生成元是( )。

答：循环群，任一非单位元

7、<H,,>是<G,,>的子群的充分必要条件是( )。

答：<H,,>是群 或 ∀ a，b G， abH，a-1H 或∀ a,b G，ab-1H

8、在一个群〈G,\*〉中，若G中的元素a的阶是k，则a-1的阶是( )。

答：k

9、在自然数集N上，下列哪种运算是可结合的？（ ）

(1) a\*b=a-b　　(2) a\*b=max{a,b}　(3) a\*b=a+2b　(4) a\*b=|a-b|

答：(2)

10、设G是所有3位二进制数构成的集合，关于异或运算，G中的幺元是（ ），011的逆元是（ ）。

答：000，011

11、10阶群的子群的阶数只可能是（ ）。

答：1,2,5,10

12、设G是群，a∈G，若|a|=12，则|a|=（ ）。

答：4

13、设A是集合，P(A)是A的幂集，则代数系统<P(A)，>中幺元是（ ）；对任意T∈P(A)，T的逆元是（ ）。

答：,T

二、选择题

1、在N上定义几个二元运算，其中不满足结合律的是（ ）。

A. a \* b = a B. a\*b=a+b-5

C. a\*b=a+3b D. a\*b=max{a，b}

答：C

2. 下面4个代数系统中构成群的是（ ）。

A. <N，+> B. {R，×}

C. <P(A)，U> D. <A，>

答：B

3．<Z，>是群，下面子集中（ ）不是它的子群。

A. {1，2，4，8} B. {1，12}

C. {1，3，9} D. {1，5，8，12}

答：A.

4. 下面集合关于相应的加法和乘法运算构成域的是（ ）。

A. {a+b| a，b∈Z} B. {a+bi| a，b∈Q}

C. {a+b| a，b∈Z} D.{ | a，b，c，d∈Z}

答：B.

5. 下面关于循环群性质的描述，错误的是（ ）。

A. 循环群必是交换群

B. 循环群的子群仍然是循环群

C. 设G是n阶循环群，a∈G，则a是生成元当且仅当a的阶数是n

D．循环群的生成元一定是唯一的

答：D.

6. 设G是群，e是幺元，a，b，c∈G，则下面关于群的性质描述错误的是（ ）。

A. 若ab=b，则必有a=e B. 若b≠c，有可能ab=ac

C. G有唯一的幂等元 D．aG=Ga

答：B.

7、6阶有限群的任何子群一定不是（ ）。

A.2阶　　B.3 阶 C. 4 阶 　D. 6 阶

答：C.

**证明题：**

1、求循环群C12={e,a,a2,…,a11}中H={e,a4,a8}的所有右陪集。

解：

因为|C12|=12，|H|=3，所以H的不同右陪集有4 个：H，{a,a5,a9},{a2,a6,a10},{a3,a7,a11}。

2、求下列置换的运算：

解：

（1）=

（2）=

==

5、试求出8阶循环群G=<a>的所有生成元和所有子群。

解：

设G是8阶循环群，a是它的生成元。则G={e,a,a2,..,a7}。由于ak是G的生成元的充分必要条件是k与8互素，故a,a3,a5,a7是G的所有生成元。

因为循环群的子群也是循环群，且子群的阶数是G 的阶数的因子，故G的子群只能是1阶的、2阶的、4 阶的或8阶的

1阶子群：{e}

2阶子群：{e, a4}

4 阶子群：{e, a2, a4, a6}

8阶子群：G={e,a,a2,..,a7}

6、设<G,·>是群，aG。令H={xG|a·x=x·a}。试证：H是G的子群。

证明：

 c，dH，c·a=a·c , d·a=a·d。故(c·d)·a=c·(d·a)=c·(a·d)=(c·a)·d=(a·c) ·d=a·(c·d)。从而c·dH。

由于c·a=a·c,且满足消去律，所以a·c-1=c-1·a。故c-1H。

从而H 是G的子群。

7、设G={1，3，5，7}，关于模8乘法运算，列出运算表，说明G构成群。

8、证明：有限群中阶大于2的元素的个数一定是偶数。

证明：

设<G,·>是有限群，则aG，有|a|=|a-1|。且当a 阶大于2时，a-1。故阶数大于2 的元素成对出现，从而其个数必为偶数。

9、证明：偶数阶群中阶为2 的元素的个数一定是奇数。

证明：

设<G,·>是偶数阶群，则由于群的元素中阶为1 的只有一个单位元，阶大于2的元素是偶数个，剩下的元素中都是阶为2 的元素。故偶数阶群中阶为2 的元素一定是奇数个。

10、试求<Z6,6>中每个元素的阶。

解：

0是< Z 6,6>中关于6的单位元。则|0|=1；|1|=|5|=6，|2|=|4|=3，|3|=2。

11、Z上的二元运算\*定义为：a,bZ，a\*b=a+b-2。试证：<Z,\*>为群。

证明：

（1）a,b,cI，(a\*b)\*c=(a\*b)+c-2=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4, a\*(b\*c)

=a+(b\*c)-2=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4。故(a\*b)\*c= a\*(b\*c)，从而\*满足结合律。

（2）记e=2。对aI，a\*2=a+2-2=a=2+a-2=2\*a.。故e=2是I关于运算\*的单位元。

（3）对aI，因为a\*（4-a）=a+4-a-2=2=e=4-a+a-2=(4-a)\*a。故4-a是a关于运算\*的逆元。

综上所述，<I,\*>为群。

12、设<S,·>为半群，aS。令Sa={ai | iZ+ }。试证<Sa,·>是<S,·>的子半群。

证明：

b，cSa，则存在k,lI+，使得b=ak,c=al。从而b·c=ak·al=ak+l。因为k+lI+，所以b·cSa，即Sa关于运算·封闭。故<Sa,·>是<S,·>的子半群。

13、证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

证明：（用反证法证明）

设在素不少于两个的群<G,>中存在零元。对aG, 由零元的定义有 a\*=。

 <G,>是群，关于\*消去律成立。 a=e。即G中只有一个元素，这与|G|2矛盾。故在元素不少于两个的群中不存在零元。

14、证明在一个群中单位元是惟一的。

证明：

设e1,e2都是群〈G,\*〉的单位元。 则e1=e1\*e2=e2。

所以单位元是惟一的。

15、设a是一个群〈G，\*〉的生成元，则a-1也是它的生成元。

证明：

xG，因为a是〈G，\*〉的生成元，所以存在整数k，使得x=a。

故x=((a))=((a))=(a)。从而a-1也是〈G，\*〉的生成元。

17、代数系统<G,\*>是一个群，则G除单位元以外无其它幂等元。

证明：

设e是该群的单位元。若a是<G,\*>的等幂元，即a\*a=a。

因为a\*e=a，所以a\*a=a\*e。由于运算\*满足消去律，所以a=e。

即G除单位元以外无其它等幂元。

19、设半群<S,·>中消去律成立，则<S,·>是可交换半群当且仅当a,bS，（a·b）2=a2·b2。

证明：

a,bS，（a·b）2=(a·b)·(a·b)=((a·b)·a)·b

=(a·(a·b))·b=((a·a)·b)·b=(a·a)·(b·b)=a2·b2;

 a,bS，因为（a·b）2=a2·b2，所以(a·b)·(a·b)=(a·a)·(b·b)。故a·((b·a)·b)=a·(a·(b·b))。由于·满足消去律，所以(b·a)·b=a·(b·b)，即(b·a)·b=(a·b)·b。从而a·b=b·a。故·满足交换律。

20、设群<G,＊>除单位元外每个元素的阶均为2，则<G,＊>是交换群。

证明：

对任一aG，由已知可得a\*a=e，即a-1=a。

对任一a,bG，因为a\*b=(a\*b)-1=b-1\*a-1=b\*a，所以运算\*满足交换律。

从而＜G,\*＞是交换群。

21、设H和K都 是G的子群。证明：HK也是G 的子群。

证明：

因为H和K都 是G的不变子群，所以HK是G 的子群。对aG，hHK，有a·h·a-1a·H·a-1，·h·a-1a·K·a-1。因为H和K都 是G的不变子群，所以a·h·a-1H且a·h·a-1K。从而a·h·a-1HK。故HK是G 的不变子群。

22、设群G的中心为C（G）={aG|xG,a·x=x·a}。证明C（G）是G的子群。

证明：

先证C（G）是G的子群。

a,bC（G），对xG,有a·x=x·a ，b·x=x·b。故（a·b）·x= a·(b·x)= a·(x·b)=(a·x)·b=(x·a)·b=x·(a·b), a-1·x=x·a-1。从而a·b，a-1C（G）。 故C（G）是G 的子群。

23、设<G,·>是没有非平凡子群的有限群。试证：G是平凡群或质数阶的循环群。

证明：

若G是平凡群，则结论显然成立。

否则设<G,·>的阶为n。任取aG且ae,记H=（a）(由a生成的G的子群)。显然H{e}，且G没有非平凡子群，故H=G。从而G一定是循环群，且a是G 的生成元。

若n是合数，则存在大于1 的整数k,m，使得n=mk。记H={e,ak,(ak)2,…,(ak)m-1}，易证H是G 的子群，但1<|H|=m<n，故H是G 的非平凡子群。这与已知矛盾。从而n是质数。

故G是质数阶的循环群。

综上所述，G是平凡群或质数阶的循环群。

24、设H和K都是G 的有限子群，且|H|与|K|互质。试证：HK={e}。

证明：

用反证法证明。

若HK{e}。则HK是一个元素个数大于1的有限集。

先证HK也是G的子群，从而也是H和K的子群。

a,b HK,则a,b H且a,bK。因为H和K都 是G的子群，故 a·b,a-1 H且a·b,a-1 K。从而a·b HK,a-1 HK。故HK是G的子群，从而也是H和K的子群。

由拉格朗日定理可知，|HK|是|H|和|K|的因子，这与已知矛盾。

25、素数阶循环群的每个非单位元都是生成元。

证明：

设<G,\*>是p阶循环群，p是素数。

对G中任一非单位元a。设a的阶为k,则k1。

由拉格朗日定理，k是p的正整因子。因为p是素数，故k=p。即a的阶就是p，即群G的阶。故a是G的生成元。

26、设<G,>是有限群，|G|＝n，则a∈G，|a|n。

证明：

aG，由封闭性及|G|=n可知a,a2,…,an,an+1中必有相同的元素，不妨设为ak=am,k<m。 由消去律得 am-k=e。从而|a|m-kn。

27、有限群G的每个元素的阶均能整除G的阶。

证明：

设|G|=n，aG，则|a|=m。令H={e,a,a2,…,am-1}。

则H是G的子群且|H|=m。由**Lagrange定理知|H|能整除|G|，故a的阶能整除G的阶。**

28、在一个群<G,\*>中，若G中的元素a的阶是k，即|a|=k，则a-1的阶也是k。

证明：

因为| a |=k，所以ak=e。即（a-1）k=(ak)-1=e。

从而a-1的阶是有限的，且|a-1|k。

同理可证，a的阶小于等于|a-1|。

故a-1的阶也是k。

29、设e是奇数阶交换群<G,\*>的单位元，则G的所有元素之积为e。

证明：

设G=<{e,a,a,…,a},\*>，n为正整数。

因为G的阶数为奇数2n+1，所以由拉格朗日定理知G中不存在2 阶元素，即除了单位元e以外，G的所有元素的阶都大于2。故对G中的任一非单位元a，它的逆元a不是它本身，且G中不同的元素有不同的逆元。

由此可见，G中的2n个非单位元构成互为逆元的n对元素。因为G 是交换群，故G的所有元素之积可变成单位元和n对互为逆元的元素之积的积，从而结果为e。

30、设S=QQ，Q为有理数集合，\*为S上的二元运算：对任意<a,b>，<c,d>S,有

<a,b>\*<c,d>=<ac,ad+b>,

求出S关于二元运算\*的单位元，以及当a0时，<a,b>关于\*的逆元。

解：

设S关于\*的单位元为<a,b>。根据\*和单位元的定义，对<x,y>S,有

<a,b>\*<x,y>=<ax,ay+b>=<x,y>, <x,y>\* <a,b>= <ax,xb+y>= <x,y>。

即ax=x, ay+b=y, xb+y=y对x,yQ都成立。解得a=1,b=0。

所以S关于\*的单位元为<1,0>。

当a0时，设<a,b>关于\*的逆元为<c,d>。根据逆元的定义，有

<a,b)\* <c,d>=<ac,ad+b>=<1,0>

<c,d)\* <a,b>=<ac,cb+d>=<1,0>

即ac=1,ad+b=0,cb+d=0。解得c=,d=-。

所以<a,b>关于\*的逆元为<,->。